Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **4**

UGA–117(A)

B.A. (Part–II) Due Ist Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 66*

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A (खण्ड–अ)

1. (i) Solve the equation :

समीकरण को हल कीजिए :

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$$

(ii) Define Hermitian and Skew-Hermitian matrices.

हर्मीशियन तथा विषम हर्मीशियन मैट्रिसेज को परिभाषित कीजिए।

(iii) Find characteristic equation of matrix A :

मैट्रिक्स A का अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(iv) State Cayley–Hamilton theorem.

कैली–हेमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए।

(v) Define abelian or commutative group.

आबेली या क्रम विनिमेय ग्रुप की परिभाषा लिखिए।

(vi) If G is a group then for $a, b \in G$, prove that $(a^{-1})^{-1} = a$.

यदि G कोई ग्रुप है, तो $a, b \in G$ के लिए सिद्ध कीजिए $(a^{-1})^{-1} = a$।

(vii) Define Quotient group.

विभाग ग्रुप को परिभाषित कीजिए।

(viii) What is the order of cycle ? Explain.

चक्र की कोटि क्या होती है ? व्याख्या कीजिए।

(ix) Find fg if :

fg ज्ञात कीजिए यदि :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(x) Define Isomorphism.

तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिए।

Section–B (खण्ड–ब)

2. Solve the biquadratic equation by Ferrari's method :

चतुर्घात समीकरण का फैरारी विधि से हल कीजिए :

$$x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 18x - 72 = 0$$

***Or* (अथवा)**

Solve the following set of equations by matrix method :

मैट्रिक्स सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y + z = 6;\ x + 2y + 3z = 14;\ -x + y - z = -2$$

3. If α, β, γ be the roots of the cubic equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, form the equation whose roots are :

$$\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$$

यदि α, β, γ समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के हल हैं, तो एक समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके हल $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$ है।

***Or* (अथवा)**

Determine the column rank of the following matrix :

निम्नलिखित मैट्रिक्स की स्तम्भ जाति ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Show that the set $\{1, -1, i, -i\}$, where $i = \sqrt{(-1)}$ is an abelian group for multiplication.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, -1, i, -i\}$, जहाँ $i = \sqrt{(-1)}$ गुणा संक्रिया के लिए एक आबेली ग्रुप है।

***Or* (अथवा)**

"Every infinite cyclic group has two and only two generation." Prove it.

"प्रत्येक अपरिमित चक्रीय ग्रुप के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।" सिद्ध कीजिए।

5. If H and K are two normal subgroups of a group G, then show that $HK \Delta G$.

यदि H और K किसी ग्रुप G के दो प्रसामान्य उपग्रुप हों, तो प्रदर्शित कीजिए कि $HK \Delta G$।

***Or* (अथवा)**

If f is a homomorphism of a group G to a group G′; then H is a subgroup of G $\Rightarrow f(H)$ is a subgroup of G′.

यदि f ग्रुप G से G′ पर समकारिता हो, तो H, G का उपग्रुप है $\Rightarrow f(H)$, G′ का उपग्रुप है।

6. If $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, then prove that :

यदि $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ और $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\rho - \rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$$

***Or* (अथवा)**

If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ compute the following :

यदि $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ निम्न का परिकलन कीजिए :

(i) α^{-1}

(ii) $\cdot\alpha\beta^{-2}$

(iii) $0(\alpha)$

Section–C (खण्ड–स)

7. Solve the equation $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ by Cardan's method.
कार्डन विधि से समीकरण $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ को हल कीजिए।

8. Find the Eigenvalues and Eigenvectors of the matrix A :
मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मूलों एवं सदिशों को ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. If $G = [a]$ is a cyclic group of order n and $H = [a^s]$, then H is a cyclic subgroup of G is the order n/d where d is HCF of n and s.
यदि $G = [a]$, n की कोटि का एक चक्रीय ग्रुप हो तथा $H = [a^s]$, तो H G का n/d कोटि का चक्रीय उपग्रुप है जहाँ d, n और s का म.स.प. (HCF) है।

10. Every Quotient group of an abelian group is abelian but not conversely.
एक आबेली ग्रुप का प्रत्येक विभाग ग्रुप आबेली होता है परन्तु विलोम अनिवार्यत: सत्य नहीं है।

11. Show that every group is isomorphic to some permutation group.
प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक ग्रुप एक क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।